第 4 节 判断函数零点所在区间（★☆）

内容提要

本节归纳如何判断函数零点在哪个区间这类问题，先梳理零点的概念和零点存在定理.

1．零点的定义：满足 $f(x)=0$ 的 x 叫做 $f(x)$ 的零点.（注意：零点不是点，而是数）

2． x_0 是 $f(x)$ 的零点 $\Leftrightarrow f(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标.

3.零点存在定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图象是一条连续不间断的曲线，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有零点. 需注意，在零点存在定理中， $f(a)f(b)<0$ 是 $f(x)$ 有零点的充分条件，不是必要条件，即使不满足 $f(a)f(b)<0$， $f(x)$ 在 (a,b) 上也可能有零点.

判断零点所在区间，抓住端点值、单调性这两点就可以了. 若遇到端点处函数值无意义的选项，可先判断其他选项，若一定要判断此选项，则使用极限分析趋势.

典型例题

【例题】函数 $f(x)=(\frac{1}{3})^x-x-5$ 的零点所在的一个区间是（　　）

（A） $(-3,-2)$　　（B） $(-2,-1)$　　（C） $(-1,0)$　　（D） $(0,1)$

解析：注意到 $y=(\frac{1}{3})^x$ 和 $y=-x-5$ 都在 $\mathbf{R}$ 上↘，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，故 $f(x)$ 最多 1 个零点，

要判断零点所在区间，只需看哪个区间端点函数值异号，下面从选项 A 开始验证，

因为 $f(-3)=(\frac{1}{3})^{-3}-(-3)-5=25>0$， $f(-2)=(\frac{1}{3})^{-2}-(-2)-5=6>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-3,-2)$ 上没有零点；

又 $f(-1)=(\frac{1}{3})^{-1}-(-1)-5=-1<0$，所以 $f(-2)f(-1)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上有零点.

答案：B

【反思】单选题中，无需判断单调性，直接验证端点值是否异号即可，解析为了严谨，故而判断了单调性.

【变式 1】函数 $f(x)=\ln x+x$ 的零点所在的区间是（　　）

（A） $(0,\frac{1}{\mathrm{e}^2})$　　（B） $(\frac{1}{\mathrm{e}^2},\frac{1}{\mathrm{e}})$　　（C） $(\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{2})$　　（D） $(\frac{1}{2},1)$

解析：因为 $y=\ln x$ 和 $y=x$ 都↗，所以 $f(x)=\ln x+x$ 也↗，故 $f(x)$ 最多 1 个零点，

要判断零点所在区间，只需看哪个区间端点函数值异号，选项 A 的 $f(0)$ 无意义，故分析极限，

因为当 $x\to 0^+$ 时， $f(x)\to-\infty$， $f(\frac{1}{\mathrm{e}^2})=\ln\frac{1}{\mathrm{e}^2}+\frac{1}{\mathrm{e}^2}=-2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{\mathrm{e}^2})$ 上无零点；

又 $f(\frac{1}{\mathrm{e}})=\ln\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{1}{\mathrm{e}}=-1+\frac{1}{\mathrm{e}}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{\mathrm{e}^2},\frac{1}{\mathrm{e}})$ 上无零点；

因为 $f(\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\ln 2+\frac{1}{2}=-\ln 2+\ln\sqrt{e}=\ln\frac{\sqrt{e}}{2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e},\frac{1}{2})$ 上无零点；

因为 $f(1)=1>0$，所以 $f(\frac{1}{2})f(1)<0$，故 $f(x)$ 的零点所在的区间为 $(\frac{1}{2},1)$.

答案：D

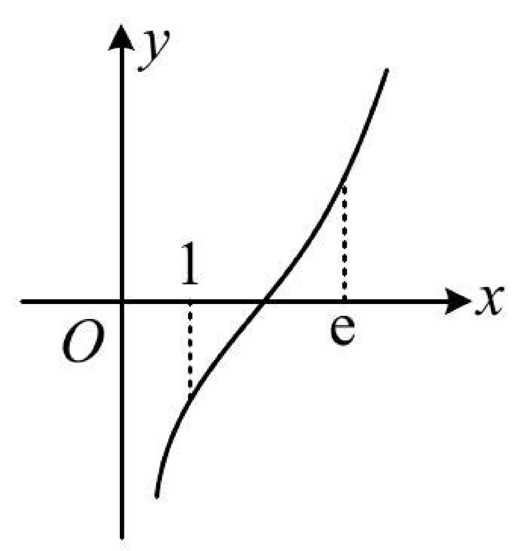
【变式 2】若函数 $f(x)=\ln x+x^2-a$ 在区间 $(1,e)$ 上存在零点，则实数 a 的取值范围为（　　）

（A）$(1,e^2)$　（B）$(1,2)$　（C）$(1,e^2+1)$　（D）$(2,\frac{2}{e}+2)$

解析：先判断 $f(x)$ 的单调性，因为 $y=\ln x$ 和 $y=x^2-a$ 在 $(0,+\infty)$ 上都↗，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

如图，$f(x)$ 在 $(1,e)$ 上存在零点等价于 $\begin{cases}f(1)<0\\f(e)>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}1-a<0\\1+e^2-a>0\end{cases}$，故 $1<a<1+e^2$.

答案：C



【变式 3】已知函数 $f(x)=\log_a x+x-b(a>0$ 且 $a\neq 1)$，若当 $2<a<3<b<4$ 时，$f(x)$ 的零点 $x_0\in(n,n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $n=$______.

解析：本题其实就是问 $f(x)$ 的零点在哪两个相邻的正整数之间，可以先判断单调性，再代值计算，

因为 $2<a<3$，所以 $y=\log_a x$ 和 $y=x-b$ 都↗，故 $f(x)$ 也↗，

因为 $f(2)=\log_a 2+2-b$，$2<a<3\Rightarrow\log_a 2\in(0,1)$，$3<b<4\Rightarrow 2-b\in(-2,-1)$，所以 $f(2)<0$，

又 $f(3)=\log_a 3+3-b$，$\log_a 3>1$，$-1<3-b<0$，所以 $f(3)>0$，从而 $f(x)$ 的零点在 $(2,3)$ 上，故 $n=2$.

答案：2

强化训练

1.（2022·河南焦作一模·★）设函数 $f(x)=2^x+\frac{x}{3}$ 的零点为 x_0，则 $x_0\in$（　　）

（A）$(-4,-2)$　（B）$(-2,-1)$　（C）$(1,2)$　（D）$(2,4)$

2．（2022·湖南临湘期末·★）函数 $f(x)=x+\cos x$ 的零点所在的区间为（　　）

（A）$(-1,-\frac{1}{2})$　（B）$(-\frac{1}{2},0)$　（C）$(0,\frac{1}{2})$　（D）$(\frac{1}{2},1)$

3．（★）若函数 $f(x)=2^x+3x+a$ 在 $(0,1)$ 内存在零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-5)$　（B）$(-5,-1)$　（C）$(0,5)$　（D）$(1,+\infty)$

4．（2022·辽宁沈阳模拟·★★）设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x-\ln x$，则 $f(x)$（　　）

（A）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$，$(1,\mathrm{e})$ 内均有零点

（B）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$，$(1,\mathrm{e})$ 内均没有零点

（C）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$ 内有零点，在 $(1,\mathrm{e})$ 内没有零点

（D）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$ 内没有零点，在 $(1,\mathrm{e})$ 内有零点

5．（★★）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-2x-5$ 的零点位于区间 $(m,m+1)$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $2^m+\log_4|m|=$（　　）

（A）$-\frac{1}{4}$　（B）$\frac{1}{4}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{3}{4}$

6．（2022·河南洛阳期末·★★★）已知函数 $f(x)=x+x^3$，$g(x)=x+3^x$，$h(x)=x+\log_3 x$ 的零点分别为 x_1，x_2，x_3，则（　　）

（A）$x_2>x_3>x_1$　（B）$x_3>x_2>x_1$　（C）$x_1>x_2>x_3$　（D）$x_3>x_1>x_2$